

Bryła sztywna to ciało, w którym odległości między dowolnie obranymi elementami nie ulegają zmianie mimo działających na ciało sił zewnętrznych.

W ruchu postępowym bryły tor każdego jej punktu jest identyczny.

W ruchu obrotowym poszczególne punkty poruszają się po okręgach o środkach leżących na jednej linii, zwanej **osią obrotu**. Poszczególne punkty obracającej się bryły mają różne wartości prędkości liniowej a taką samą wartość prędkości kątowej ω .

Prędkością kątową ω nazywamy wektor, którego wartość jest równa $\omega = \Delta\alpha/\Delta t$, kierunek pokrywa się z osią obrotu bryły, a zwrot wyznaczamy za pomocą reguły śruby prawoskrętnej.

$\Delta\alpha$ – zmiana kąta zakreślonego przez obracającą się bryłę sztywną (wielkość analogiczna do przebytej drogi s w mechanice ruchu postępowego – tej, której uczyliście się dotąd)

Δt – czas, w którym kąt został zakreślony.

ω – prędkość kątowa wyrażona w **radianach na sekundę**. (analogicznie do prędkości $v = s/t$ wyrażanej w **metrach na sekundę**).

Do zrozumienia powyższych zależności warto powtórzyć opis ruchu po okręgu z klasy I LO oraz przestudiować https://pl.wikipedia.org/wiki/Prędkość_kątowa
https://pl.wikipedia.org/wiki/Przyspieszenie_kątowe

Podobnie jak w mechanice ruchu postępowego, w której przyspieszenie $a = \Delta v/\Delta t$ wyrażamy w metrach na sekundę do kwadratu, definiuje się przyspieszenie kątowe ϵ (grecka mała litera epsilon) wyrażane w radianach na sekundę do kwadratu:

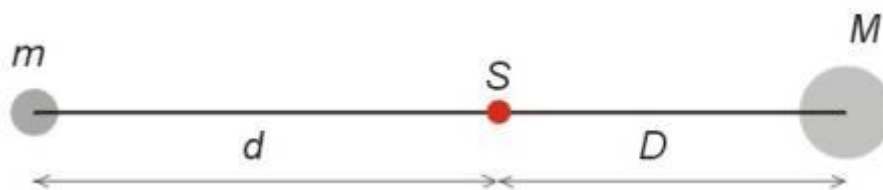
$$\epsilon = \Delta\omega/\Delta t,$$

Bryłą nazywa się układ wielu (na ogół) punktów materialnych, których wzajemne odległości pozostają stałe. Rozkład mas w obrębie bryły opisuje się przez różne parametry, z których najważniejszymi są: **środek masy** oraz **moment bezwładności**.

Środek masy

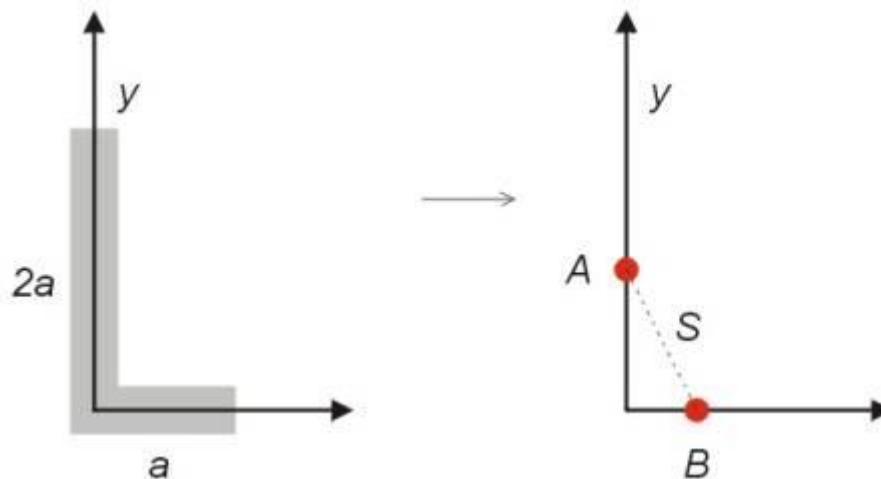
Pojęcie to odnosi się nie tylko do brył sztywnych, ale także do dowolnego układu punktów materialnych. Jest to punkt geometryczny, w którym jakby koncentruje się masa całego układu. Jest to średnie położenie poszczególnych składowych układu. W przypadku brył jednorodnych środek masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym. Środek masy kuli leży w jej środku, środek masy odcinka znajduje się w jego połowie, środek masy trójkąta leży na przecięciu się jego środkowych.

Środek masy S dwóch ciał o masach m oraz M określa się jako punkt leżący na odcinku łączącym te masy, przy czym $md = MD$ (klasa 2 gimn, warunek równowagi dźwigni dwustronnej)



Przykład 1. Środek masy dwóch ciał o masach 1 kg i 3 kg, oddalonych o 40 cm, znajduje się w punkcie S odległym o 10 cm od ciała cięższego i 30 cm - od ciała lżejszego.

Przykład 2. Środek masy ciała w kształcie litery L, w której pozioma część (o długości a) jest 2 razy krótsza od części pionowej, znajduje się w następujący sposób. Najpierw zastępujemy obie części litery przez dwie masy punktowe, usytuowane w punktach A i B. Współrzędne tych punktów są równe: $A = (0, a)$, $B = (a/2, 0)$. Następnie znajdujemy położenie środka masy tych punktów względem kierunku Ox oraz Oy oddzielnie. Współrzędne środka mas oznaczmy jako $S = (x, y)$. Wówczas w kierunku poziomym mamy równość: $2m x = m (a/2 - x)$, skąd znajdujemy: $x = a/6$. W kierunku pionowym obowiązuje podobna zależność: $2m(a - y) = m y$, skąd wynika, że $y = a/3$. Zatem środek masy takiego ciała znajduje się w punkcie o współrzędnych: $S = (a/6, a/3)$



Przykład 3. Środek masy S układu Ziemia - Księżyc. Masa Ziemi M_Z wynosi ok. 6×10^{24} kg, zaś masa Księżyca M_K - ok. $7,3 \times 10^{22}$ kg. Odległość d między środkami tych ciał jest bliska wartości $3,84 \times 10^8$ m. Odległość x środka masy S od środka Ziemi określamy z równania: $x M_Z = (d - x) M_K$.

Po prostych przekształceniach otrzymujemy stąd $x = 4600$ km. Promień Ziemi wynosi ok. 6370 km, a zatem środek masy układu Ziemia - Księżyc znajduje się wewnątrz Ziemi. Wokół tego punktu obracają się - w rytmie miesięcznym - oba ciała jak jedna sztywna całość.

Ruch środka masy

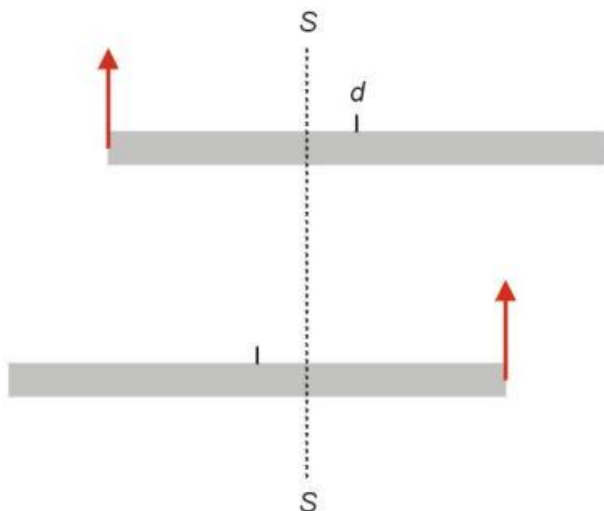
Środek masy porusza się tak, jakby cała masa M ciała była skupiona w tym punkcie. Jego przyspieszenie a_0 określone jest przez sumę sił zewnętrznych F działających na bryłę:

$$a_0 = \frac{F}{M}$$

Oznacza to, że siły istniejące między poszczególnymi częściami ciała nie mają wpływu na jego ruch postępowy. Na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona siły wewnętrzne znoszą się parami. Gdy wypadkowa sił zewnętrznych równa jest zeru, środek masy spoczywa (lub porusza się jednostajnie po prostej).

Ruch środka masy bryły utożsamiamy z jej ruchem postępowym.

Przykład 1. Na końcu nieruchomej łodzi o masie $M = 200$ kg i długości $L = 6$ m stoi człowiek o masie $m = 50$ kg. W pewnym momencie człowiek przeszedł na drugi koniec łodzi. W tym czasie łódź przesunęła się o pewien odcinek x względem wody. Jego wartość znajdujemy z warunku stałości położenia środka masy (linia przerywana).



Środek łodzi (zaznaczony kresczką) przesunął się o wartość dwa razy większą, niż wynosi jego odległość d od ustalonego punktu S . Określamy ją z równości: $200 d = 50 (3 - d)$ Stąd mamy: $d = 0,6$ m. Przesunięcie łodzi wynosi więc 1,2 m.

Przykład 2. Pocisk wystrzelony pod pewnym kątem do powierzchni Ziemi porusza się po paraboli. W pewnym momencie rozpada się na kilka części. Mimo to środek masy kontynuuje lot po pierwotnej paraboli.

Moment bezwładności https://pl.wikipedia.org/wiki/Moment_bezwładności

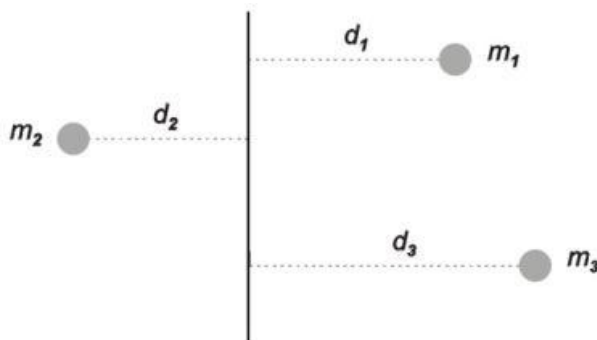
Moment bezwładności jest miarą bezwładności w ruchu obrotowym.

Jest to pojęcie analogiczne do **masy**, która jest miarą bezwładności ciała w ruchu postępowym.

Moment bezwładności oznaczamy symbolem **I**. Jego wartość w istotnym stopniu zależy od rozkładu mas w obrębie bryły. Definiuje się go jako **sumę mas** składających się na bryłę, **pomnożonych przez kwadraty ich odległości od osi obrotu**:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

Stąd jednostką miary momentu bezwładności w układzie SI jest **kg m²**



Na rysunku odległości oznaczono symbolem **d** zamiast najczęściej używanych **r** lub **R**

Moment bezwładności odgrywa analogiczną rolę w dynamice ruchu obrotowego jak masa w dynamice ruchu postępowego.

W ruchu postępowym masa, oznaczana m wyraża bezwładność, czyli „opór” stawiany przez ciało podczas przyspieszania lub hamowania, zatem pojawia się w równaniach dynamiki jako współczynnik proporcjonalności pomiędzy działającą siłą F i uzyskanym przyspieszeniem a , pędem p i prędkością v oraz (w połówce) pomiędzy energią kinetyczną E i kwadratem prędkości v :

$$F = m \cdot a; \quad p = m \cdot v; \quad E = m/2 \cdot v^2$$

Podobnie w ruchu obrotowym (przy ustalonej osi obrotu) moment bezwładności I wyraża opór stawiany przez ciało przy zmianie prędkości obrotowej, i występuje jako współczynnik proporcjonalności pomiędzy napędzającym momentem siły M i uzyskanym w jego wyniku przyspieszeniem kątowym ϵ , momentem pędu L i prędkością kątową ω oraz (w połówce) pomiędzy energią kinetyczną E i kwadratem prędkości kątowej ω :

$$M = I \cdot \epsilon; \quad L = I \cdot \omega; \quad E = I/2 \cdot \omega^2$$

Moment bezwładności zależy od rozkładu masy względem osi obrotu ciała, zatem dla tego samego ciała wartość momentu bezwładności **zależy od wyboru osi obrotu**.

Dla konkretnej osi moment bezwładności jest skalarem.

(W uogólniony sposób moment bezwładności ciała dla dowolnego kierunku osi obrotu, przechodzącej przez środek masy, wyraża się jako tensor).

Najprostsze zadanie.

Oblicz moment bezwładności ciała o masie $m = 5$ kg odległego od osi obrotu o $r = 2$ m.

Rozwiązanie:

Dane podane są jawnie w treści zadania, stosujemy wzór na moment bezwładności $I = mr^2$ wstawiamy dane do wzoru i liczymy: $I = 5\text{kg} \cdot (2\text{m})^2 = 20 \text{ kg m}^2$

Momenty bezwładności najprostszych brył są od dawna obliczone (metodami rachunku całkowego) i skatalogowane.

Praca domowa:

Proszę napisać w zeszycie krótką notatkę, obejrzyć film, po którym sporo się wyjaśni:

<https://www.youtube.com/watch?v=aupXaE5N9yI> do piątej minuty (nie zabraniam do końca), wynotować momenty bezwładności najprostszych brył: walec, kula pręt, pierścień.

Skany lub zdjęcia zeszytu poproszę wysłać na mojego maila.

Dla ciekawskich i niecierpliwych – co to jest moment siły M i moment pędu L

https://pl.wikipedia.org/wiki/Moment_siły

https://pl.wikipedia.org/wiki/Moment_pędu

Kontakt do mnie: bosaw@op.pl lub telefonicznie **692 477 902**

Również w przypadku problemów możecie w ten sam sposób zadawać mi pytania.

Bogdan Sawicki